idp

15.12.2021

Nº 06

REVISTA DEBATES EM ECONOMIA APLICADA

ANÁLISE DE EFICIÊNCIA DE FUNDO DE INVESTIMENTO UTILIZANDO DEA

TARCÍSIO RENATO TONETTO JÚNIOR

www.idp.edu.br

debates em economia aplicada

Análise de Eficiência de Fundo de Investimento Utilizando DEA

TARCÍSIO RENATO TONETTO JÚNIOR [1]

[1] Tarcísio Renato Tonetto Júnior é Mestre em Economia pelo Instituto Brasileiro de Ensino, Desenvolvimento e Pesquisa (IDP). E-mail: tarcisio_renato@hotmail.com.

IDP

DEBATES EM ECONOMIA APLICADA

O IDP é um centro de excelência no ensino, na pesquisa e na extensão nas áreas da Administração Pública, Direito e Economia. O Instituto tem como um de seus objetivos centrais a profusão e difusão do conhecimento de assuntos estratégicos nas áreas em que atua, constituindo-se um *think tank* independente que visa contribuir para as transformações sociais, políticas e econômicas do Brasil.

DIREÇÃO E COORDENAÇÃO
Diretor Geral
Francisco Schertel
Coordenador do Mestrado em Administração Pública
Caio Cordeiro de Resende
Coordenador do Mestrado em Economia
José Luiz Rossi

CONSELHO EDITORIAL
Coordenação
Thiago Costa Monteiro Caldeira
Supervisão e Revisão
Renan Holtermann, Matheus Gonçalves, Mathias Tessmann, Milton Sobrinho e Alessandro Freire
Comunicação e Marketing
Antonio Zaninetti e Daniel Jordão
Projeto gráfico e diagramação
Juliana Vasconcelos

www.idp.edu.br

Revista Técnica voltada à divulgação de resultados preliminares de estudos e pesquisas aplicados em desenvolvimento por professores, pesquisadores e estudantes de pós-graduação com o objetivo de estimular a produção e a discussão de conhecimentos técnicos relevantes na área de Economia.

Convidamos a comunidade acadêmica e profissional a enviar comentários e críticas aos autores, visando o aprimoramento dos trabalhos para futura publicação. Por seu propósito se concentrar na recepção de comentários e críticas, a Revista Debates em Economia Aplicada não possui ISSN e não fere o ineditismo dos trabalhos divulgados.

As publicações da Revista estão disponíveis para acesso e download gratuito no formato PDF. Acesse: www.idp.edu.br

As opiniões emitidas nesta publicação são de exclusiva e inteira responsabilidade dos autores, não exprimindo, necessariamente, o ponto de vista do IDP.

Qualquer citação aos trabalhos da Série só é permitida mediante autorização expressa do(s) autor(es).

SUMÁRIO

1. Introdução • 6
2. Value at Risk • 7
3. Conditional Value at Risk • • • • • • • • • • • • • • • 9
4. Data Envelopment Analysis - DEA• 9
4.1. Modelos DEA e retornos de escala• • • • • • • • • • • • • • • • • • 13
4.1.1 DEA CRS• 13
4.1.2 DEA VRS• • • • • • • • • • • • • • • • • • 15
4.1.3 DEA NIRS• 17
4.2 DEA e Fundos de Investimentos • 19
5. Metodologia • 21
5.1 Amostra • 21
5.2 Modelos VaR e CVaR • 23
5.3 Modelo DEA • 24
5.4 Variáveis do estudo • 24
6. Estimação e discussão dos resultados • 26
7. Considerações Finais • 30
8. Referências Bibliográficas • 31

Resumo: O mercado financeiro dispõe de diversas métricas de análise de desempenho, as quais possibilitam um exame comparativo entre os investimentos. Nesse mercado, insere-se o Fundo do Exército (FEx), cujos recursos financeiros são decorrentes de exploração patrimonial e serviços prestados pelo Exército Brasileiro, bem como do rendimento desses mesmos recursos. Com efeito, visando maximizar o retorno dos ativos financeiros disponíveis, o FEx mantém um portfólio diversificado, com aportes em ativos de renda fixa e fundos de investimentos, dentre eles o FI Fidelidade II, da Caixa Econômica Federal. Assim, este trabalho objetiva mensurar a eficiência do FI Fidelidade II e, ainda, construir a fronteira de eficiência da amostra estudada em um primeiro momento, para depois buscar expandir essa fronteira valendo-se de diversificação entre os fundos. Para isso, emprega-se uma técnica de análise envoltória de dados (*Data Envelopment Analysis* - DEA), utilizados os retornos como *outputs* e as taxas de administração e o *Conditional VaR* – uma medida de risco – como *inputs*. Após a estimativa da fronteira e mensuração da eficiência das unidades de amostra, denominadas *Decision Making Units* (DMUs), a fronteira expandida foi obtida mediante processo iterativo de análise de fundos teóricos, constituídos pelos fundos eficientes mais próximos entre si na fronteira.
Palavras-chave: eficiência; fundos de investimento; *Data Envelopment Analysis, Conditional* VaR.

Abstract: The financial market has several performance analysis metrics, which enable a comparative exmination between investments. In this market, the Army Fund is included, whose financial resources are derived from the exploration of assets and services provided by the Brazilian Army, as well as the income from these resources. In fact, with a view to maximizing the return on available financial assets, Army Fund maintains a diversified portfolio, with investments in fixed income assets and investment funds, including FI Fidelidade II. Thus, this work aims to measure the efficiency of FI Fidelidade II and also to build the efficiency frontier of the sample studied at first, and then seek to expand this frontier using diversification between the funds. For this, a technique of data envelopment analysis (DEA) is used, using returns as outputs and administration fees and Conditional VaR – a measure of risk – as inputs. After estimating the frontier and measuring the efficiency of the sample units, called Decision Making Units (DMUs), the expanded frontier was obtained through an iterative process of analysis of theoretical funds, constituted by the efficient funds closest to each other on the frontier.
Keywords: efficiency; investment funds; Data Envelopment Analysis, Conditional VaR.

1. INTRODUÇÃO

O mercado financeiro brasileiro experimentou forte expansão a partir da estabilização econômica advinda da implantação do Plano Real. Com efeito, o patrimônio líquido dos fundos de investimentos em relação ao PIB saltou de 8,77% em dezembro de 1995 para 81,29% em dezembro de 2020[i].

Nesse mercado insere-se o Fundo do Exército (FEx), criado com a finalidade de auxiliar o provimento de recursos financeiros para o aparelhamento do Exército Brasileiro (EB) contando, para tanto, com receitas próprias diretamente arrecadadas e com o rendimento decorrente dessas mesmas receitas. Atualmente o FEx realiza investimentos em títulos de renda fixa e em fundos de investimentos.

Ceretta e Costa (2001) apontam que o tema central em finanças é a existência do *trade off* entre risco assumido e retorno esperado, de forma que os ativos com maior risco devem oferecer retorno proporcional, sob pena de não atrair investidores. Em consonância a essa relação de troca, os principais indicadores de desempenho de ativos são construídos sobre essas duas informações, como os Índices de Sharpe, de Treynor e de Jensen.

O rol das métricas de gestão de risco é vasto e se aprimora conforme o desenvolvimento do mercado financeiro. Nesse escopo encontra-se o *Value at Risk* (VaR), apresentado pelo banco J. P. Morgan em 1994. O VaR, segundo Jorion (2003), representa um valor crítico de perda esperada de uma carteira sujeita a riscos de flutuação de preços em determinados intervalos de tempo e graus de confiança.

Mesmo amplamente utilizado no mercado financeiro, o VaR não deixou de ser objeto de críticas. Basicamente, a ferramenta não fornece dados sobre perdas maiores que a estimada ao valor crítico, ou seja, uma vez superado o nível de confiança, não há estimativa quanto à dimensão da perda esperada. Essa informação é suprida pelo *Conditional VaR* (CVaR).

Mais recentemente, a *Data Envelopment Analysis* (DEA) tem sido empregada pela literatura para aferir o desempenho de carteiras de ativos. A análise envoltória de dados é uma ferramenta utilizada para avaliar a eficiência relativa entre *Decision Making Units* (DMUs), ou Unidades de Tomada de Decisão, considerando os insumos (*inputs*) utilizados durante o processo produtivo e os produtos (*outputs*) ou resultados (*outcomes*) gerados.

Já o FEx apresenta superávit financeiro e aportou parcela de seus recursos em um fundo de investimento junto à Caixa Econômica Federal (CEF), o Fundo de Investimento Caixa Fidelidade II Renda Fixa Crédito Privado Longo Prazo.

Portanto, este artigo destina-se a estimar a eficiência do FI Caixa Fidelidade II RF CP LP em

uma amostra formada por fundos de investimentos semelhantes. Ainda, este artigo se dedica a estimar uma fronteira eficiente valendo-se da DEA e, além disso, estimar uma fronteira eficiente teórica baseada em diversificação de fundos utilizando a DEA em uma abordagem iterativa.

Para tanto, serão utilizados como *inputs* dados de taxa de administração e *Conditional VaR* dos retornos diários do período estudado; e como *output*, o retorno alcançado pelos fundos no mesmo período, todos calculadas em relação ao *benchmarck* do setor, o rendimento do Certificado de Depósito Interbancário (CDI).

São analisados dados de fundos de investimentos de "Renda Fixa" classificados como "Duração Livre" com "Grau de Investimento".

Ainda, optou-se por analisar o período de 36 meses, compreendido entre abril de 2018 a março de 2021, por representar um horizonte razoável de investimento e, além disso, englobar os efeitos da pandemia de COVID-19 sobre os fundos em estudo.

O mercado de debêntures, por exemplo, foi fortemente impactado logo no início da pandemia. Com efeito, o IDA-Geral, Índice de Debêntures ANBIMA que reflete o comportamento da totalidade das debêntures precificadas pela associação, apresentou queda de 5,14% em março de 2020.

Além disso, observou-se significativa oscilação do Tesouro Selic – título público pós- fixado com rentabilidade indexada à Taxa Selic –, inclusive com queda no preço do título, o que não ocorria desde 2002.

Do exposto, este trabalho se justifica uma vez que pretende aplicar a DEA a um conjunto de fundos de investimento que atendem aos requisitos de nível de risco suportado pelo FEx, fornecendo embasamento quanto a decisões sobre aportes de recursos.

Ademais, acredita-se que este artigo pode contribuir para a literatura nacional ao conjugar, na análise de desempenho de fundos de investimentos, a DEA e uma medida de risco financeiro adequada, valendo-se para tanto do CVaR, considerado por Acerbi e Tasche (2002) uma medida de risco coerente.

Além disso, são utilizadas taxas de administração como *inputs*, permitindo um exame além da relação risco-retorno.

2. VALUE AT RISK

Kimura *et al*. (2008, p. 28) definem o VaR como o valor potencial de perda de um portfólio para um certo horizonte de tempo e com determinado grau de confiança.

Jorion (2003, p. 19) apresenta o VaR mais formalmente, como o "percentil da distribuição de retornos projetada sobre um horizonte estipulado", ou seja, selecionado um nível de confiança

α, o valor em risco corresponderá ao percentil 1-α da distribuição.

Como exemplo, Kimura *et al.* (2008, p. 28) citam o caso do relatório anual de 1994 do Banco J.P. Morgan, cuja carteira apresentava VaR diário equivalente a US$ 15.000.000,00 com um nível de confiança de 95%. Em outras palavras, o banco estabelecia o limite de alteração negativa da carteira em US$ 15.000.000,00 de um dia para o outro, com 95% de confiança.

O valor em risco de uma carteira pode ser estimado de acordo com, basicamente, três metodologias: o Modelo de Simulação Histórica, o Modelo de Simulação de Monte Carlo e o Modelo de Variâncias-Covariâncias, e, mesmo sendo este último o mais utilizado, não existem evidências que apontem a ascendência de um modelo sobre outro (KIMURA *et al*., 2008, p. 39).

O Modelo de Simulação Histórica é a metodologia mais simples e intuitiva, partindo- se da premissa de que os retornos já experimentados representam fielmente a distribuição de probabilidade dos eventos vindouros. Dessa forma, não há a necessidade de estimação de parâmetros que espelhem uma distribuição de probabilidade e o modelo de Simulação Histórica é considerado, então, um modelo não paramétrico para estimação do VaR (KIMURA *et al.*, 2008, p. 40).

Esse método incide em utilizar a ponderação em vigor dos ativos componentes da carteira para simular os retornos que seriam obtidos de acordo com a série histórica de retorno desses mesmos ativos.

Os pesos dos ativos permanecem de acordo com os dados em vigência e, ponderando os respectivos retornos históricos da amostra, fornecem uma distribuição de resultados hipotéticos, os quais, depois de ordenados, servirão como base para estimativa do VaR de acordo com o nível de confiança (quantil selecionado da distribuição calculada) desejado.

Note-se que os rendimentos devem ser calculados de acordo com o horizonte de tempo pretendido pelo VaR, logo, se o valor em risco a ser estimado equivale ao de um dia, este deve ser o intervalo histórico entre os retornos.

Já o Modelo de Simulação de Monte Carlo é um método que cobre grandes valores possíveis das variáveis financeiras, sendo desenvolvido, primeiramente, com o gestor de risco determinando um processo estocástico para os rendimentos dos ativos, com os parâmetros desse processo (desvio-padrão e média) obtidos através de dados históricos (JORION, 2003, p. 206).

A partir desses dados são geradas trajetórias de preços hipotéticos para os ativos de interesse, usados para embasar diversos valores da carteira que, à semelhança do Modelo de Simulação Histórica, utiliza a ponderação vigente de cada ativo na carteira.

Kimura *et al.* (2008, p. 53) observam que, uma vez simulados os retornos dos ativos e, consequentemente, o da carteira, o Modelo de Simulação de Monte Carlo torna-se análogo ao de

Simulação Histórica.

Finalmente, o Modelo de Variâncias-Covariâncias considera a linearidade entre o retorno do ativo e o fator de risco subjacente que, aliado à hipótese de normalidade para os fatores de risco, permite construir intervalos de confiança para perdas potenciais a partir da média e do desvio-padrão desses fatores, conforme KIMURA *et al*. (2008, p. 86).

Para Jorion (2003, p. 187), a hipótese de normalidade permite calcular o VaR com mais velocidade, sendo indicado para carteiras grandes, com grande número de correlações entre os ativos.

3. CONDITIONAL VALUE AT RISK

O *Conditional VaR*, ou *Expected Shortfall*, surge em decorrência das limitações do VaR. O CVaR representa a média das perdas superiores ao VaR e fornece mais informações das caudas da distribuição dos retornos (SANTOS *et al*., 2019, p. 30).

Além disso, segundo Lamb e Tee (2012, p.14) o CVaR atende às propriedades de medidas de risco coerente de Artzner *et al*. (2009): invariância de translação, subaditividade, homogeneidade positiva e monotonicidade.

Adicionalmente, novas abordagens de CVaR têm sido utilizadas além daquelas permitidas pelos modelos de VaR apresentados acima. Harmantzis, Miao e Chien (2006) testaram o desempenho de diferentes modelos de VaR e CVaR na presença de caudas pesadas nos retornos diários de índices de ações (S&P500, DAX, CAC, Nikkei, TSE e FTSE) e moedas (dólar dos EUA contra Euro, Iene, Libra e dólar canadense) por mais de dez anos. Os autores concluíram que estimativas de CVaR pelo método histórico e pela Teoria dos Valores Extremos (EVT - *Extreme Values Theory*), usando a abordagem *Peak Over Treshold* (POT), apresentaram melhor capacidade de previsão de risco.

No mesmo sentido, Kourouma *et al.* (2010) testaram VaR e CVaR com modelo histórico e POT para dados de índices de ações (CAC, S&P 500) durante a crise de 2008. O estudo evidenciou medidas de risco subestimadas pelo VaR (com maior subestimação pelo VaR histórico), mas CVaR com base na EVT confiável para horizontes de cinco e dez dias, porém subestimando o risco para horizonte de um dia.

4. DATA ENVELOPMENT ANALYSIS - DEA

Apesar de consagrados, os índices de Sharpe, Treynor e Jansen utilizam apenas os dados de risco e retorno, desprezando informações inerentes às carteiras de ativos, como taxa de administração e taxa de saída, por exemplo. A análise envoltória de dados, por sua vez, é hábil em

avaliar o desempenho de fundos de investimentos adicionando outros fatores determinantes à relação entre risco e retorno, sendo capaz de revelar os pontos de ineficiência das carteiras e como atingir o desempenho ótimo (MACEDO e MACEDO, 2007).

A mensuração da eficiência, por sua vez, pode ser obtida, em geral, por duas vias: mediante estimativa baseada em técnicas paramétricas, valendo-se da adoção de uma função de produção e ajustada mediante métodos econométricos; ou, de outro modo, empregando a *Data Envelopment Analysis*, uma técnica não-paramétrica, embasada em programação linear, utilizada para encontrar a fronteira de eficiência e a eficiência relativa das unidades de um conjunto de referência (MACEDO e MACEDO, 2007, p. 47).

Já Destefanis (2002), aponta a abordagem *Free Disposal Hull* (FDH), proposta originalmente por Deprins *et al*. (1984), como mais uma técnica não-paramétrica apropriada a construir uma fronteira de eficiência de um conjunto de produção. Tanto na abordagem DEA quanto na FDH, os conjuntos de produção estão sujeitos à hipótese de livre disponibilidade (ou livre eliminação) de insumos e produtos (*free disposal*), adicionando-se a hipótese de convexidade ao modelo DEA.

A propriedade de livre eliminação de insumos e produtos válida para um conjunto de possibilidade de produção *Y* é assim definida por Lamb e Tee (2012, p. 688):

$$Livre\ eliminação: se\ (x, y) \in Y, então\ (x^{u}, y^{u}) \in Y\ quando\ x^{u} \geq x\ e\ y^{u} \leq y$$

Isto é, o conjunto de referência *Y* envolve todas as unidades que utilizam a mesma quantia *x* ou mais *x'* de insumos para gerar um nível *y* ou menor *y'* de produto (DESTEFANIS, 2002, p. 12).

A DEA foi apresentada por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) como uma medida de avaliação de eficiência de programas públicos. Os autores utilizaram o termo *Decision Making Units* (DMUs), ou Unidades de Tomada de Decisão, para designar estruturas responsáveis por entregar determinados produtos (*outputs*), utilizando, durante o processo, certa quantidade de insumos (*inputs*).

A técnica desenvolvida por Charnes, Cooper e Rhodes passou a ser conhecida por modelo DEA CCR, iniciais dos nomes dos autores, ou, ainda, DEA CRS, de *Constant Returns to Scale*, uma vez que considera retornos constantes de escala, isto é, variações nos insumos geram variações proporcionais nos produtos (COELLI *et al.*, 1998).

O modelo fornece o grau de eficiência de cada DMU, obtido pela razão entre o máximo de saídas ponderadas e entradas ponderadas durante o processo produtivo. A eficiência de cada unidade depende dos vetores de *inputs* e *outputs* de todas as DMUs da amostra, buscando a maximização do índice para cada unidade analisada, conforme pode ser observado abaixo (CHARNES *et al.*, 1978).

$$\text{Max}\, h_0 = \frac{\sum_{r=1}^{c} u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{N} v_i x_{i0}} \qquad (1)$$

sujeito a:

$$\frac{\sum_{r=1}^{c} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{N} v_i x_{ij}} \leq 1; \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$u_r, v_i \geq 0; \qquad r = 1, \ldots, s; \qquad i = 1, \ldots, m$$

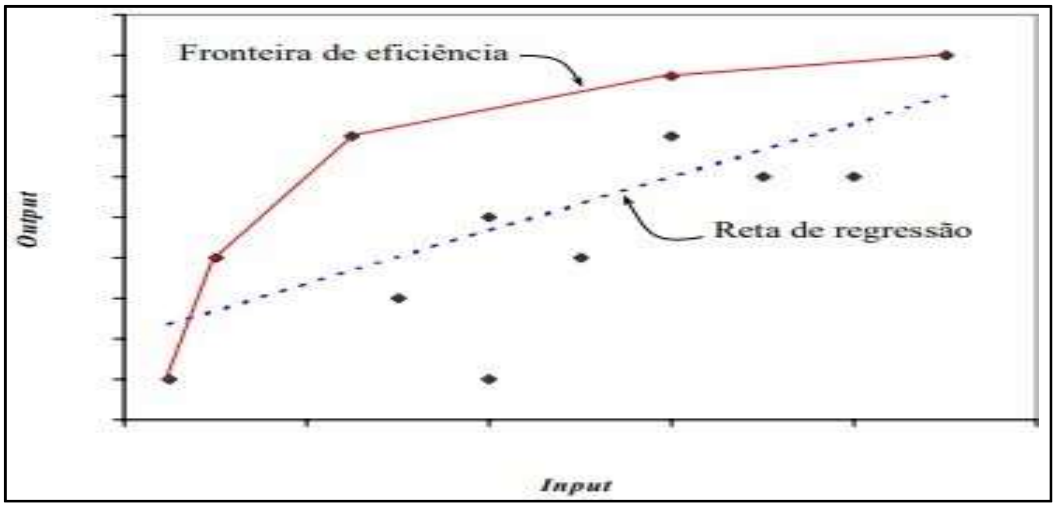
Onde
Max h_0 é a eficiência da DMU_0
$j = 1, \ldots, n$ é o conjunto de DMUs em análise
y_{rj} são os produtos da j-ésima DMU
x_{ij} são os insumos da j-ésima DMU
u_r é o peso a ser determinado para cada y_r
v_i é o peso a ser determinado para cada x_i

Assim, a eficiência calculada para cada DMU é adimensional e relativa, ou seja, a escolha dos pesos depende das observações do conjunto avaliado e das restrições estabelecidas (BANKER, CHARNES e COOPER, 1984). As unidades eficientes apresentem razão igual a um e servem como padrão às demais unidades tomadoras de decisão da amostra. Segundo Kassai (2002), as unidades devem atender alguns requisitos para fins de avaliação de eficiência relativa, tais como serem comparáveis entre si, atuarem sob as mesmas condições e, ainda, possuírem os mesmos insumos e produtos, os quais podem diferir apenas em magnitude. Já o termo DMU pode representar diferentes organizações, englobando grupos empresariais, departamentos ou unidades administrativas.

Ademais, ao admitir a análise de eficiência de processos produtivos em que são empregados mais de um *input* ou, ainda, resultam em mais de um *output*, o método DEA apresenta-se como um recurso apto a fornecer uma medida de análise multicriterial e, ao mesmo tempo, singular, uma vez que consolida os vetores de desempenho em forma de um índice capaz de sintetizar o processo produtivo (MACEDO *et al.*, 2006).

De acordo com Soares de Mello *et al*. (2005), ao otimizar cada observação individual, a DEA objetiva delimitar uma fronteira de eficiência – formada pelas unidades Pareto eficientes –, em alternativa aos modelos paramétricos, que otimizam uma função de regressão a partir dos dados coletados, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1. Fronteira de eficiência (não paramétrica) e Reta de regressão (paramétrica).



Fonte: Soares de Mello *et al.* (2005).

Como visto, a fronteira de eficiência de produção é formada pelas DMUs que conseguem minimizar o uso de *inputs* no processo de produção, ou, por outro lado, maximizar o produto com uma dada quantidade de insumos. Já o grau de eficiência de uma DMU ineficiente é mensurado pela distância desta unidade em relação à fronteira.

Resumidamente, se uma DMU A é eficiente e capaz de gerar *x outputs*, utilizando *y inputs*, então outras DMUs também poderiam gerar o mesmo resultado ao atingirem a eficiência.

Ainda, a eficiência pode ser avaliada mediante, basicamente, duas orientações. Na orientação para *inputs*, procura-se responder em quanto os insumos podem ser reduzidos para manter a produção da unidade. Alternativamente, na orientação para *outputs*, a investigação é em quanto o nível de produção pode ser expandido mantendo-se os insumos inalterados (COELLI *et al*., 1998, p. 137).

Conforme Pessanha *et al.* (2010), a medida de eficiência orientada para *inputs* de uma DMU é tida como a maior redução do vetor de insumos que possibilita a mesma quantidade de produtos, de tal forma que o coeficiente de eficiência assume valores entre zero e um, com a unidade indicando que a utilização de insumos é ótima e a DMU está na fronteira de eficiência.

Lins *et al.* (2007) acrescentam que a modelagem orientada para *output* atende ao objetivo de aumentar a produção, ou seja, as mudanças necessárias para que as DMUs atinjam a fronteira devem ensejar que as unidades ineficientes aumentem o produto, mantido o vetor de insumos constante.

Nota-se, portanto, que a análise de eficiência se embasa na relação entre recursos e saídas envolvidas nos processos produtivos. Estes, por seu turno, podem apresentar diferentes retornos de escala a depender da função de produção considerada. Kassai (2002) assinala que as hipóteses consideradas para as curvas de produção comportam retornos de escala crescentes, constantes

ou decrescentes.

Assim, enquanto o modelo DEA CCR considera retornos constantes de escala, Banker, Charnes e Cooper (1984) desenvolveram o modelo DEA BBC, a fim de analisar economias com rendimentos variáveis de escala. Conforme Macedo e Macedo (2007) o modelo BBC é também conhecido como VRS, de V*ariable Returns to Scale*, podendo ser aplicado para analisar se o *output* resulta em aumento mais ou menos que proporcional ao acréscimo de *input*.

Já o modelo DEA NIRS, ou *Non Increasing Returns to Scale*, pode ser empregado para analisar tecnologias de produção que exibem retornos não crescentes de escala, conforme Färe *et al.* (1994, p. 33).

4.1 Modelos DEA e retornos de escala

Para Destefanis (2002), as hipóteses de *free disposability* e convexidade embasam a identificação da fronteira de produção, a qual é efetivada mediante a construção de uma curva convexa em torno do conjunto de referência. O autor aponta três tipos de curvas típicas de aplicação de DEA, conforme os retornos de escala: DEA CRS, DEA VRS e DEA NIRS.

4.1.1 DEA CRS

Sobre a modelagem matemática aplicada à análise envoltória de dados, Cooper *et al*. (2011, p. 34) alegam que o modelo fracionário apresentado em (1) comporta infinitas soluções, uma vez que se u^* e v^* foram pesos ótimos, então αu^* e αv^* atenderão às restrições sempre que $\alpha > 0$. No entanto, a transformação proposta por Charnes e Cooper (1962) embasou o emprego de programação linear em substituição à programação fracionária, a fim de determinar uma única solução para os pesos u_r e v_i (ao adicionar a restrição $\sum_{i=1}^{N} v_i x_{i0} = 1$). Assim, a transformação "Charnes-Cooper" proporciona o problema de programação linear equivalente a (4), abaixo (COOPER *et al.*, 2011):

$$\text{Max} h_0 = \sum_{r=1}^{c} u_r y_{r0} \qquad (2)$$

sujeito a:

$$\sum_{r=1}^{c} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{N} v_i x_{ij} \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_i x_{i0} = 1$$

$$u_r, v_i \geq 0$$

O modelo (2) acima é orientado para *inputs* (procura minimizar os insumos mantendo o nível de produto). Conforme Macedo *et al.* (2006, p. 92), essa forma de problema de programação linear é conhecida por problema dos multiplicadores, como também são conhecidos os pesos u_r e v_i, podendo ser denotada por CRS/M/I.

Já o problema dos multiplicadores DEA CRS orientado para *output*, ou CRS/M/O, procura maximizar as saídas, conforme segue (MACEDO *et al*., 2006):

$$Min \sum_{r=1}^{N} v_i x_{i0} \tag{3}$$

sujeito a:

$$\sum_{r=1}^{c} u_r y_{rj} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{c} u_r y_{rj} \geq 0$$

$$u_r, v_i \geq 0$$

Ainda, cada problema de programação linear é associado a um modelo dual, cuja solução pode ser deduzida a partir da resolução do modelo original, conhecido como primal (THANASOULIS, 2001, p. 62). Enquanto o modelo primal é também chamado de multiplicador, o dual é conhecido por envoltória, ou Modelo do Envelope. Conforme Cooper *et al.* (2011, p. 9), o modelo dual DEA CCR orientado para input é definido por:

$$\theta^* = \min \theta \tag{4}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq \theta x_{io}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\lambda_j \geq y_{ro}$$

$$\lambda_j \geq 0$$

Mariano *et al.* (2006) esclarecem que a modelagem dual permite calcular as metas para as DMUs ineficientes. No modelo acima, orientado para *inputs*, $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j$ é a meta de um *input* x_i da DMU em análise, sendo cada variável λ associada a uma DMU específica. Em outras palavras, os coeficientes λ_j apontam quais DMUs *j* servem de *benchmark* para que as unidades ineficientes alcancem a fronteira de eficiência.

Conforme Soares de Mello *et al.* (2005), quando um λ é igual a zero, a DMU correspondente não é parâmetro para a DMU analisada. Por outro lado, unidades com $\lambda > 0$ devem ser adotadas como *benchmarks* e, quanto maior o coeficiente λ, maior a importância da respectiva DMU como referência para a DMU em análise.

Pelo exposto, a função objetivo (Θ) representa o valor que deve multiplicar os *inputs*, de modo a minimizá-los (no modelo acima) e posicionar a DMU em análise na fronteira de eficiência (PINTO e RODRIGUES, 2012).

4.1.2 DEA VRS

O Modelo DEA BCC, iniciais dos autores Banker, Charnes e Cooper, foi apresentado em 1984, adotando o axioma da convexidade no lugar do axioma da proporcionalidade do modelo CCR (JUBRAN, 2006, p. 114), passando a considerar tecnologias de produção com retornos desproporcionais aos insumos. Devido ao emprego de retornos variáveis de escala, o modelo é também conhecido como DEA VRS, de *Variable Returns to Scale* (SOARES DE MELLO *et al.*, 2005).

O modelo BBC, ao permitir a análise de tecnologias com diferentes retornos de escala ao longo da fronteira de eficiência, admite que a produtividade varie em decorrência da escala de

produção adotada (BELLONI, 2000, p. 68).

Para Macedo e Macedo (2007, p. 50), o afastamento da condição de proporcionalidade entre insumos e produtos tornou o método mais aderente às situações práticas de diferentes setores, possibilitando o desenvolvimento de técnicas voltadas ao aperfeiçoamento dos modelos de análise de eficiência.

Segundo Soares de Mello *et al.* (2005), a fronteira de produção convexa adotada pelo DEA VRS equivale, matematicamente, a uma restrição adicional ao Modelo do Envelope, e possibilita que unidades que utilizam poucos insumos tenham retornos crescentes de escala, enquanto as DMUs com alto emprego de *inputs* apresentem retornos decrescentes.

Segundo Cooper *et al.* (2011, p.12), a restrição adicional $\sum^{n}_{j=1} \lambda_j = 1$ ao modelo dual

permite efetuar avaliações de retornos de escala. O modelo de envoltória DEA VRS orientada para inputs é apresentado abaixo:

$$\theta^* = \min \theta \qquad (5)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq \theta x_{io}$$

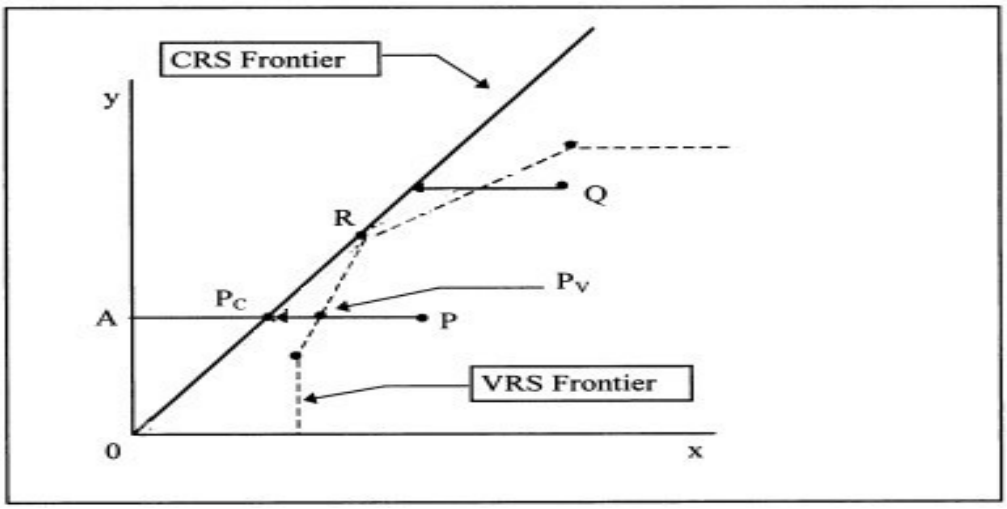
$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\lambda_j \geq y_{ro}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1;\ \lambda_j \geq 0$$

Mariano *et al.* (2006) esclarecem que o modelo CCR é usado para explicar a eficiência total, comparando uma DMU com todas as suas competidoras, enquanto o modelo BCC calcula a eficiência técnica, pois compara uma DMU somente com aquelas que operam em escala semelhante.

Coelli *et al.* (1998, p. 151) apontam que a diferença entre os coeficientes de eficiência técnica dos modelos DEA CRS e DEA VRS indica a ineficiência de escala da empresa, conforme a figura 2 a seguir:

Figura 2. Fronteiras de eficiência DEA CRS e DEA VRS.



Fonte: Adaptado de Coelli *et al.* (1998).

Valendo-se da figura acima, a eficiência técnica da DMU P, pelo modelo DEA CRS orientado para *input*, equivale à APc/AP, enquanto o modelo DEA VRS, com a mesma orientação, indica eficiência igual a APv/AP.Os autores ainda apontam que a ineficiência de escala pode ser encontrada pelo quociente APc/APv,

Logo, a ineficiência de escala é dada pela razão entre os coeficientes de eficiência técnica $\Theta^*_{CRS}/\Theta^*_{VRS}$, isto é (APc/AP)/(APv/AP). Esta medida, no entanto, não indica se a

empresa opera com retornos crescente ou decrescentes de escala (COELLI *et al*., 1998, p. 151).

4.1.3 DEA NIRS

Cooper *et al.* (2011, p. 42) elencam, além do modelo VRS, o modelo desenvolvido por Färe, Grosskopf e Lovell (FGL) como um caminho a ser seguido pela aplicação da análise envoltória de dados considerando tecnologias com retornos de escala. De acordo com Wu *et al.* (2016, p. 83), a abordagem FGL, baseada no modelo VRS, possibilitou análise de tecnologias com retornos não crescentes de escala, ou *non increasing returns to scale* (NIRS).

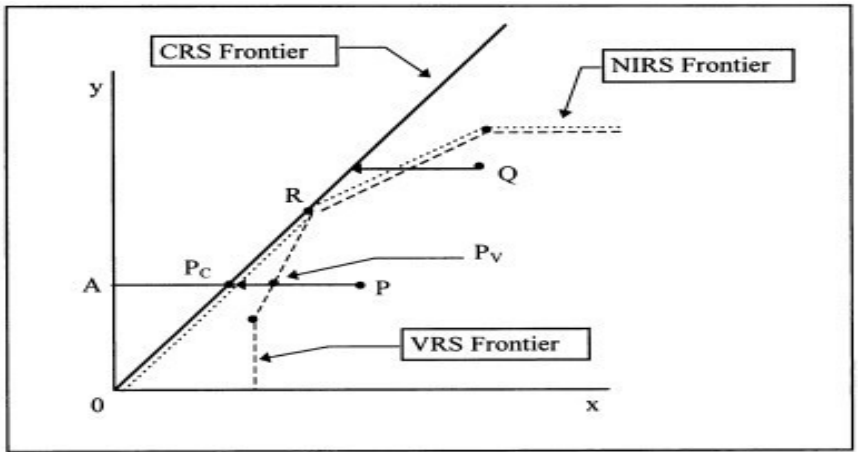
Segundo Ray (2020, p. 21), Färe, Grosskopf e Lovell consideram uma tecnologia entre os modelos CRS e VRS, incluindo ao modelo dual de retornos constantes a restrição

$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1.$

A adoção do modelo DEA NIRS é apontada por Coelli *et al*. (1998, p. 151) como uma

ferramenta adequada para indicar se a DMU com ineficiência de escala está operando com retornos crescentes ou decrescentes de escala, conforme a figura 3:

Figura 3. Fronteiras de eficiência DEA CRS, DEA VRS e DEA NIRS.



Fonte: Coelli *et al.* (1998).

As fronteiras de eficiência das tecnologias com retornos constantes (CRS) e não crescentes (NIRS) de escala coincidem na região de retornos crescentes de escala do modelo VRS, o que implica que, nessa faixa de produção, $\Theta^*_{CRS} = \Theta^*_{NIRS} < \Theta^*_{VRS}$. Por seu turno, as fronteiras de eficiência VRS e NIRS são idênticas na região de retornos decrescentes, denotando $\Theta^*_{CRS} < \Theta^*_{NIRS} = \Theta^*_{VRS}$ nessa escala de produção (RAY, 2020, p. 21).

Cooper *et al.* (2011, p. 68) resumem a relação entre os coeficientes dos modelos DEA CRS, NIRS e VRS da seguinte forma: $\Theta^*_{CRS} \leq \Theta^*_{NIRS} \leq \Theta^*_{VRS}$.

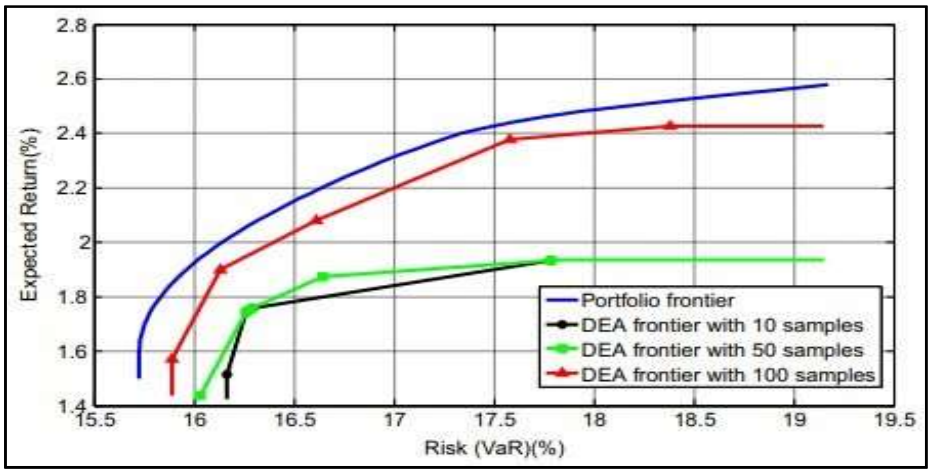
4.2 DEA e Fundos de Investimentos

Liu *et al.* (2015) explicam que a abordagem fronteiriça estabelecida pela Teoria da Carteira Eficiente de Markowitz motivou o desenvolvimento de modelos DEA não lineares, também conhecidos como modelos de diversificação, destinados a computar a diversificação dos ativos na eficiência das carteiras.

Os autores demonstram, no entanto, que modelos lineares clássicos DEA são adequados para estimar uma fronteira de eficiência convergente à fronteira de Markowitz. Os autores demonstram que as fronteiras delimitadas pelo modelo clássico DEA VRS com conjunto adequado de dados convergem para a fronteira de portfólio conforme o número de amostras analisadas aumenta.

Ainda, o trabalho aplica modelos DEA de otimização de portfólio mais complexos, incluindo custos de transação, restrições de negociação e diferentes medidas de risco. A figura 4 apresenta a fronteira de eficiência e as fronteiras DEA com VaR como medida de risco para 10, 50 e 100 amostras.

Figura 4. Fronteiras de eficiência e fronteiras DEA VRS com VaR.



Fonte: Liu *et al.* (2015).

A fronteira DEA converge para a verdadeira fronteia de portfólio com o aumento de amostras, o que permite utilizar o coeficiente de eficiência DEA para estimar a eficiência da carteira, o que ilustra a praticidade e eficácia da abordagem DEA (LIU *et al.*, 2015, p. 117).

Ceretta e Costa (2001) utilizaram a análise envoltória de dados para mensurar a performance de 106 fundos de investimentos carteira livre, considerando como *inputs* o desvio-padrão dos retornos em um ano, o desvio-padrão dos retornos em dois anos e o custo de administração. Como *outputs*, os autores utilizaram o retorno mensal médio em um ano e o retorno mensal médio em dois anos. Os dados referem-se a observações mensais no período de dezembro de 1997 a novembro de 1999.

Os autores encontraram sete fundos eficientes, em que os retornos ponderados compensaram de maneira justa os atributos indesejáveis. Os fundos eficientes formaram uma fronteira de eficiência bidimensional, com a somatória ponderada dos atributos indesejados no eixo x e a somatória dos atributos desejados no eixo y.

Segundo o estudo, a capacidade de ponderação dos atributos pelo modelo DEA auxiliou o processo de tomada de decisão, demonstrando que os fundos mais eficientes apresentaram dominância no longo prazo.

A análise envoltória de dados também foi utilizada para estimar uma carteira eficiente por Rotela Júnior *et al.* (2014). Os autores avaliaram as quarenta ações com maior participação Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA), das quais aproveitaram como *outputs* o lucro por ação e os retornos de um, dois e três anos; enquanto foram abordados como *inputs* o Beta e a volatilidade dos ativos como medidas de risco, e o índice preço/lucro como medida de custo.

Os autores encontraram quinze ações eficientes ao emprego do modelo DEA BBC, chamada de carteira DEA, a qual foi comparada a outras duas carteiras teóricas: uma baseada no Índice de Sharpe e outra adicionando o Índice de Sharpe às quinze ações da carteira DEA, a qual resultou em 8 ações e foi chamada de DEA Sharpe, com esta apresentando a melhor relação entre risco e retorno.

Bisso *et al.* (2016), por sua vez, aplicaram o modelo DEA na análise da performance dos cinquenta maiores fundos de investimento no Brasil, de acordo com o patrimônio líquido, enquadrados na categoria "Ações Livre", durante o período de 2012 a 2014. Os autores fizeram uso do modelo DEA BBC orientado para *inputs*, abordando como atributos de *input* os patrimônios líquidos médios dos fundos, os desvios-padrão de 6 meses (curto prazo) e 12 meses (médio prazo) dos retornos mensais, e a taxa de administração média dos fundos. Os *outputs* utilizados foram as rentabilidades de 6 meses (curto prazo) e 12 meses (médio prazo). Ao fim do estudo, os pesquisadores concluíram que patrimônio líquido elevado não é sinônimo de eficiência. Os autores acreditam que fundos maiores estão sujeitos a normas mais severas, pois atendem a um número maior de clientes, o que impede mudanças mais ágeis na carteira. Ainda concluem que a taxa de administração não é determinante no *score* de eficiência e que os fundos considerados eficientes apresentam melhores retornos no longo prazo do que no curto prazo.

Macedo e Macedo (2007) utilizaram o método não-paramétrico de análise envoltória de dados para avaliar a eficiência no mercado de fundos DI – que tem por *benchmark* a taxa do CDI. Os autores avaliaram 28 fundos DI enquadrados como os melhores do país em 2004 pela literatura especializada, utilizando como *input* a volatilidade dos retornos anuais dos fundos em relação ao CDI e os custos referentes às taxas de administração; e como *output* os retornos de seis meses e

três anos; permitindo analisar três tipos de eficiência para os fundos DI: curto prazo, longo prazo e total, este, englobando as duas primeiras.

Os autores encontraram muitos fundos com taxas de administração elevadas, desproporcionais em relação aos concorrentes e aos seus próprios desempenhos, considerando-se tanto risco quanto retorno. Ainda, muitos fundos analisados apresentaram altas variações de rendimentos em relação ao CDI, um risco significativamente acima do esperado para fundos DI, caracterizando uma gestão passiva pouco eficiente em seguir o *benchmark*.

Lamb e Tee (2012, p. 689) justificam o modelo DEA NIRS como adequado aos retornos de escala de fundos de investimento, uma vez que, por um lado, retornos constantes de escala permitiriam retornos maiores do que qualquer carteira poderia produzir e, por outro, o DEA VRS não permite reduzir o risco alocando parte do capital em caixa.

Os autores apontam que o modelo DEA NIRS, ao analisar DMUs isoladamente, não considera a possibilidade de diversificação da carteira, o que permite uma combinação alocativa com mais retorno e/ou menos risco que os alcançados pelos fundos individualmente. Ainda apresentam o modelo DEA NIRS completo à entrada, ou modelo de diversificação consistente, o qual se destina a suprir uma lacuna do DEA NIRS clássico, uma vez que este, ao analisar DMUs isoladamente, não contempla a diversificação de ativos.

Assim, o modelo de diversificação consistente compara cada DMU com uma fronteira eficiente teórica formada pela combinação de todas as carteiras possíveis.

Lamb e Tee (2012) afirmam, todavia, que a complexidade matemática do modelo DEA NIRS completo o torna computacionalmente intratável. Como alternativa, empregam DEA NIRS clássico, incorporando à análise alguns fundos extras, chamados de fundos nocionais, formados pelas DMUs eficientes da estimativa original.

Essa abordagem de fundos nocionais dá início a um procedimento iterativo, considerando as correlações entre os fundos e resultando na estimativa das eficiências do modelo de diversificação consistente (LAMB e TEE, 2012).

5. METODOLOGIA

Este capítulo destina-se a apresentar a amostra a ser examinada, os indicadores utilizados para o estudo e a metodologia empregada na análise de eficiência.

5.1 Amostra

Os fundos de investimento foram escolhidos dentre aqueles que se enquadram como

renda fixa “Grau de Investimento” com “Livre Duração”, e classificados com risco menor ou igual a três (em uma escala de 1 a 5) conforme lâmina de informações essenciais disponibilizada por cada fundo. Trata-se, pois, de um processo de amostragem não probabilístico.

Os dados de retorno dos fundos de investimentos foram coletados do site da Comissão de Valores Mobiliários, as taxas de administração são disponibilizadas pelas lâminas de cada fundo, enquanto as taxas de CDI estão disponíveis no site da B3.

Dessa forma, obteve-se a uma amostra de 59 fundos, sob responsabilidade de 28 gestores, abaixo discriminados:

Tabela 1: Fundos de Investimento selecionados

DMU	Gestor	Sigla	Fundo	DMU	Gestor	Sigla	Fundo
1	AF Invest	AF30	AF InvestGeraes 30	33	Impacto	IMPH	Impacto Horizonte
2		AFIG	AF InvestGeraes				
				34	Infinity	INFL	Infinity Lotus
3	Artesanal	ARTE	Artesanal				
				35	Integral	INTG	Integral
4	Az Quest	AZQL	AZ Quest Luce				
				36	Iridium	IRAP	Iridium Apollo
5	Banrisul	BSFL	Banrisul Flex				
6		BSFP	Banrisul Flex Plus	37	Monger	MOAE	Mongeral Aegon
7		BSPR	Banrisul Premium				
				38	Plural	PLHY	Brasil Plural High Yield
8	BB	BB10	BB Atenas 10				
9		BB14	BB Atenas 14	39	Porto	POSE	Porto SeguroEmpresa
10	Bradesco	BRFT	Bradesco Feeder	40	Rio	RIBR	Rio Bravo
11		BRBD	Bradesco Bond				
12		BRYD	Bradesco Yield	41	Safra	SFAN	Safra ANS
13		BRTI	Bradesco Target I	42		SFEM	Safra Exec Master 2
14		BRHC	Bradesco Health Care	43		SFRF	Safra Renda Fixa
15		BRHA	Bradesco Ativo	44		SFTM	Safra Top Master
16		BRHT	Bradesco Top				
				45	Santand	STAN	Santander FI ANS II
17	BTG	BTCM	BTG Capital Markets	46		STPT	Santander Perf Top
18		BTPL	BTG CDB Plus	47		STCR	Santander Crescimento
19		BTMA	BTG Master CDB	48		STIN	Santander Institucional
20		BTMU	BTG Multi CDB				
21		BTSC	BTG TesouroSelic	49	Skopos	SKIM	SkoposImage
22		BTYR	BTG YieldRef				
				50	Sul	SUAE	Sul América Excellence
23	Capitânia	CAPC	Capitânia Cash	51	América	SUAA	Sul América Ativo
24	CEF	CBRM	Caixa Brasil Matriz	52	Vinci	VIRF	FI Vinci RF
25		CFID	Caixa Fidelidade				
26		**CFII**	**Caixa Fidelidade II**	53	Votoran	VTBA	BV Banks
27		CPSP	Caixa PMSP	54		VTEA	BV Eagle
28		CQUA	Caixa Qualificado	55		VTIN	BV Institucional

29		CSEB	Caixa Sebrae				
				56	Western	WATR	Western Asset Tradicional
30	Concórdia	CONE	Concórdia Extra	57		WAAT	Western Asset Ativo
31	G5	G5RF	G5 FI Renda Fixa	58	XP	XPCL	XP Corporate Light
				59		XPRE	XP Referenciado
32	Gauss	GAIN	Gauss Income Master				

Os fundos foram agrupados por gestor, os quais foram elencados por ordem alfabética. Dessa forma, o fundo objeto deste estudo está listado como a DMU 26 da tabela acima.

5.2 Modelos VaR e CVaR

Para o cálculo do VaR foi utilizado o modelo de variância-covariância, com prazo de um dia, indicada para carteiras grandes, expostas a vários fatores de riscos (JORION, 2003, p. 134).

$$VaR_{\mathrm{p}} = \alpha\sigma_{\mathrm{p}}W \qquad (6)$$

Onde:

VaR_p = VaR da carteira em valores nominais;

α = nível de confiança de uma distribuição normal;

σ_p = desvio-padrão da carteira;

W = valor da carteira.

Uma vez que se adotou o CVaR em relação ao CDI, o cálculo do VaR foi empregado da seguinte maneira:

$$VaR_{\mathrm{p,CDI}} = \alpha\sigma_{\mathrm{p,CDI}} \qquad (7)$$

Onde:

$VaR_{p,CDI}$ = VaR do fundo de investimento em relação ao CDI;

α = nível de confiança de uma distribuição normal;

$\sigma_{p,CDI}$ = desvio-padrão do fundo de investimento em relação ao CDI.

Por conseguinte, para o CVaR foi empregada a média dos valores que superaram o $VaR_{p,CDI}$, de acordo a equação a seguir:

$$CVaR_{\alpha}(Y) = E(Y|Y > VaR_{\alpha}(Y)) \qquad (8)$$

Onde:

Y = conjunto de retornos do fundo de investimento em relação ao CDI;

VaR_{α} = VaR do fundo de investimento em relação ao CDI ao nível de confiança α.

5.3 Modelo DEA

A análise de eficiência foi obtida através do modelo DEA-NIRS orientado para *output,* apresentado abaixo:

$$\phi_O = max\phi \quad (9)$$

sujeito a:

$$\phi_O y_{Or} \leq \sum_{j=1}^{n} y_{jr} \lambda_j$$

$$x_{Oi} \geq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lambda_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1; \lambda_j \geq 0$$

O modelo DEA NIRS foi adotado tendo em vista ser o mais adequado para aferir retornos de escala de carteiras de investimento, enquanto a orientação para *output* foi adotada em razão do mandato contido no Regulamento do Fundo do Exército, de visar o maior rendimento dos recursos, proporcionalmente aos custos envolvidos.

Ainda, adotou-se a solução iterativa apresentada por Lamb e Tee (2012) a fim estimar uma fronteira de eficiência expandida em decorrência dos efeitos da diversificação de ativos.

Esse procedimento se resume a construir carteiras *h* a partir das unidades eficientes *f* e *g* mais próximas entre si, de modo que *h = 0,5(f+g)* seja incorporada à amostra sujeita à análise subsequente. Esse procedimento iterativo foi realizado até que o incremento do coeficiente de eficiência de *h* em relação a *f* e *g* fosse ≤ 0,01.

5.4 Variáveis do estudo

Para medidas de *output* foram utilizados os retornos alcançados pelos fundos de 1º de abril de 2018 a 31 de março de 2021 em relação à taxa de remuneração do CDI, disponibilizados na tabela abaixo:

Tabela 2: outputs selecionados

DMU	*Output*	DMU	*Output*	DMU	*Output*	DMU	*Output*	DMU	*Output*
1	93,26	13	100,32	25	96,32	37	90,50	49	146,85
2	76,91	14	95,11	**26**	**101,54**	38	84,81	50	73,68
3	104,80	15	97,20	27	97,36	39	153,67	51	81,32

4	95,41	16	95,97	28	95,69	40	82,47	52	93,54
5	95,52	17	70,85	29	99,35	41	93,31	53	97,26
6	84,59	18	86,06	30	85,48	42	110,71	54	95,83
7	97,07	19	90,06	31	83,88	43	111,37	55	101,07
8	98,93	20	57,80	32	75,71	44	132,97	56	100,02
9	96,13	21	90,48	33	49,86	45	97,24	57	126,06
10	106,80	22	61,39	34	158,67	46	104,20	58	90,34
11	100,48	23	89,35	35	128,34	47	92,09	59	94,52
12	70,74	24	96,68	36	80,15	48	94,09		

Para as medidas de *input* foram utilizadas as variáveis abaixo, em valores percentuais, disponíveis na Tabela 3:

- *Input* 1: CVaR de um dia com nível de confiança 95%.
- *Input* 2: CVaR de um dia com nível de confiança 97,5%.
- *Input* 3: CVaR de um dia com nível de confiança 99%.
- *Input* 4: taxa de administração, em percentual médio[ii] do Patrimônio Líquido de cada fundo.

Tabela 3: inputs selecionados

DMU	*Inputs*				DMU	*Inputs*			
	(1)	(2)	(3)	(4)		(1)	(2)	(3)	(4)
1	2189,27	2306,65	2683,03	0,65	31	1319,45	1507,15	1507,15	0,50
2	2813,89	3475,10	3705,48	0,50	32	2578,21	2829,93	2993,47	0,20
3	453,98	493,64	493,64	0,60	33	7334,52	8942,46	10139,86	0,61
4	3276,87	3411,10	3708,97	0,20	34	45810,80	45810,80	56697,72	0,42
5	798,86	798,86	922,41	0,50	35	2127,77	2289,85	2289,85	0,75
6	1031,52	1101,30	1179,16	0,50	36	2949,11	3103,90	3445,03	0,75
7	365,67	365,67	415,46	0,20	37	706,99	722,35	839,63	0,45
8	431,46	484,68	608,96	0,14	38	945,54	945,54	980,56	0,18
9	511,72	511,72	630,77	0,15	39	2411,39	2411,39	2411,39	0,33
10	1647,25	1994,21	2358,05	0,15	40	2413,31	2413,31	2413,31	0,20
11	2258,48	2460,80	2919,98	0,50	41	1017,03	1249,28	1688,20	0,45
12	203,96	257,89	337,01	0,50	42	1339,93	1610,67	1664,77	0,35
13	1207,82	1508,03	2135,31	0,30	43	1359,52	1633,40	1690,84	0,05
14	330,01	391,43	439,95	0,20	44	4299,46	5001,21	5805,04	0,05
15	899,97	991,64	1199,29	0,10	45	481,53	563,73	659,82	0,05
16	922,35	995,39	1206,83	0,10	46	2653,43	3103,62	3297,56	0,20
17	1693,81	1693,81	1865,14	0,25	47	2122,75	2605,61	3324,60	0,10
18	9503,20	9503,20	9503,20	0,33	48	822,46	992,57	1141,20	0,10
19	11423,20	11423,20	11423,20	0,00	49	5036,81	6046,95	6882,18	0,30
20	11793,54	13210,20	13210,20	0,40	50	2023,23	2243,65	2500,24	1,15
21	704,41	882,02	944,22	0,20	51	4118,06	4425,38	4976,53	0,30
22	1863,01	2182,71	2671,11	0,75	52	284,13	312,03	372,57	0,50
23	972,43	1128,77	1128,77	0,20	53	639,40	639,40	666,36	0,07
24	718,83	718,83	752,73	0,20	54	1162,22	1241,65	1377,75	0,15
25	513,71	569,26	600,35	0,20	55	502,54	581,01	668,72	0,50
26	**682,57**	**814,05**	**814,05**	**0,05**	56	913,85	1132,18	1302,65	0,20
27	289,44	289,44	365,71	0,08	57	3311,18	4301,48	4566,97	0,30

28	866,32	1010,53	1155,51	0,50	58	2163,26	2400,05	2582,15	0,40
29	248,19	291,53	353,92	0,10	59	680,96	728,47	806,80	0,88
30	1791,49	2087,70	2382,96	1,00					

Os *inputs* são variáveis do tipo quanto menor, melhor, enquanto o *output* é do tipo quanto maior, melhor.

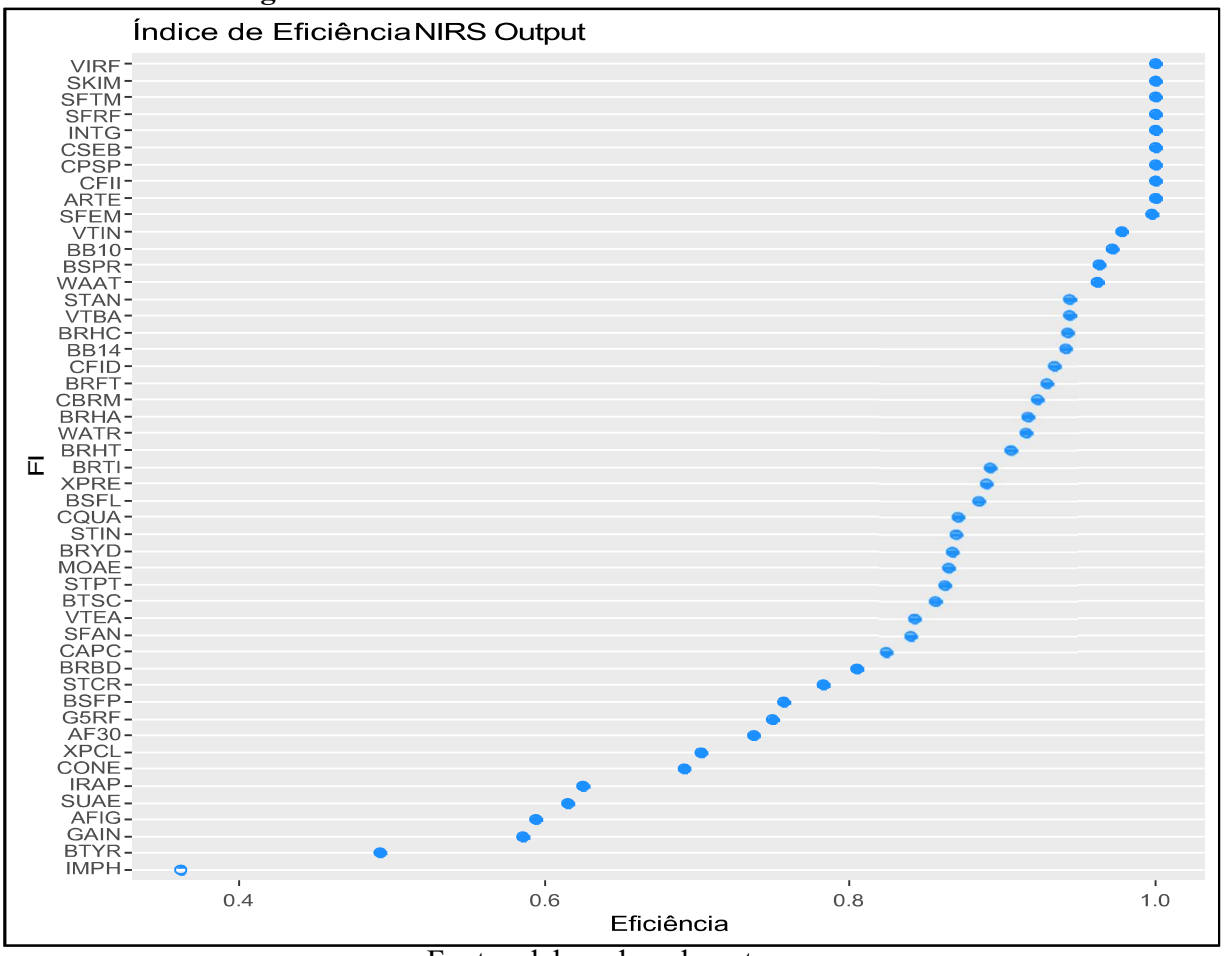
6. ESTIMAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Ainda antes da estimativa das eficiências, aplicou-se o método *Jack Strap* para detecção de *outliers*, o qual apontou as DMUs AZ Quest Luce (4), BTG Capital Markets (17), BTG CDB Plus (18), BTG Master CDB (19), BTG Multi CDB (20), Infinity Lotus (34), Brasil Plural High Yield (38), Porto Seguro Empresa (39), Rio Bravo (40) e Sul América Ativo (51) com dados discrepantes, restando quarenta e nove unidades para avaliação de eficiência.

Analisando preliminarmente os dados, pode-se observar grande disparidade nas medidas de CVaR entre os fundos. O Bradesco Yeld apresentou o menor $CVaR_{95\%}$, 204,0%, enquanto o fundo Impacto Horizonte apresentou 7.334,5% como mesma medida de risco, indicando diferentes graus de exposição a riscos entre os gestores, apesar de os fundos seguirem a mesma classificação ANBIMA. Há, ainda, grande variação entre os riscos assumidos por cada fundo para diferentes níveis de confiança. O fundo BV Banks RF CP FI, do Votorantim, apresenta diferença de 4,22% entre o $CVaR_{99\%}$ e o $CVaR_{95\%}$, enquanto o Bradesco FI RF Target I apresenta diferença de 76,79% entre os mesmos *inputs*. Já pelo lado do retorno, apenas 16 fundos superaram o CDI no período.

Assim, com base nas informações coletadas, foi empregado o *software Efficiency Measurement System* (EMS) para estimar a eficiência dos fundos pelo modelo DEA NIRS com orientação para *output*. A figura a seguir, obtida mediante emprego do *software* R, apresenta os resultados alcançados.

Figura 5. Índice de eficiência dos fundos de investimento.



Fonte: elaborado pelo autor.

A fronteira eficiente é formada por nove fundos, incluindo o fundo objeto deste estudo, o FI Fidelidade II. Além dele, os fundos Artesanal, Integral, Safra Renda Fixa, Safra Top Master e Skopos Image formam a fronteira de eficiência e apresentaram retornos acima do CDI no período. Os fundos Caixa PMSP, Caixa Sebrae e FI Vinci RF também compõem a fronteira eficiente, porém com retornos abaixo do índice de referência do mercado para o período em estudo. Pelo exposto, essas DMUs apresentaram as melhores combinações entre taxa de administração, níveis de riscos e retornos alcançados.

Ainda, o FI Fidelidade II mostrou-se *benchmark* para o Fundo Safra Executivo Master 2, conforme pode ser visto na Tabela 4, a qual apresenta em pormenores os resultados obtidos com emprego do EMS.

Tabela 4: índices de eficiência e benchmarks dos fundos de investimento

DMU	Eficiência	Benchmark			DMU	Eficiência			
	Benchmark								
1	73,65%	35 (0,86)	43 (0,11)	44 (0,03)	31	74,89%	29 (0,23)	35 (0,20)	43 (0,58)
2	59,46%	35 (0,64)	43 (0,03)	44 (0,33)	32	58,58%	35 (0,80)	43 (0,00)	44 (0,20)
3	100,00%			13	33	36,23%		44 (0,66)	49 (0,34)
5	88,39%	3 (0,54)	29 (0,26)	35 (0,20)	35	100,00%			38
6	75,60%	3 (0,31)	29 (0,31)	35 (0,37)	36	62,57%	35 (0,57)	43 (0,10)	44 (0,33)
7	96,25%	3 (0,18)	29 (0,81)	35 (0,02)	37	86,52%	29 (0,74)	35 (0,13)	43 (0,13)
8	97,18%	29 (0,89)	35 (0,07)	43 (0,05)	41	84,05%	29 (0,58)	35 (0,39)	43 (0,04)
9	94,05%	29 (0,88)	35 (0,08)	43 (0,04)	42	99,67%		26 (0,03)	43 (0,97)
10	92,79%	35 (0,14)	43 (0,80)	44 (0,06)	43	100,00%			23
11	80,46%	35 (0,64)	43 (0,24)	44 (0,12)	44	100,00%			11
12	86,65%			29 (0,82)	45	94,37%	3 (0,05)	29 (0,84)	35 (0,12)
13	89,10%	29 (0,37)	35 (0,33)	43 (0,30)	46	86,27%	35 (0,07)	43 (0,55)	44 (0,38)
14	94,18%	3 (0,17)	29 (0,81)	35 (0,03)	47	78,18%	35 (0,07)	43 (0,69)	44 (0,24)
15	91,68%	29 (0,50)	35 (0,04)	43 (0,47)	48	86,94%	3 (0,00)	29 (0,69)	35 (0,31)
16	90,50%	29 (0,49)	35 (0,04)	43 (0,47)	49	100,00%			3
21	85,60%	29 (0,70)	35 (0,16)	43 (0,13)	50	61,48%	35 (0,36)	43 (0,53)	44 (0,11)
22	49,26%		3 (0,16)	35 (0,84)	52	100,00%			0
23	82,44%	29 (0,50)	35 (0,18)	43 (0,32)	53	94,30%	29 (0,80)	35 (0,09)	43 (0,11)
24	92,28%	29(0,77)	35 (0,16)	43 (0,07)	54	84,31%	3 (0,21)	29 (0,34)	35 (0,45)
25	93,36%	3 (0,04)	30 (0,84)	35 (0,12)	55	97,80%	3 (0,03)	29 (0,84)	35 (0,13)
26	**100,00%**			**1**	56	91,54%	29 (0,62)	35 (0,31)	43 (0,07)
27	100,00%			0	57	96,12%	35 (0,46)	44 (0,51)	49 (0,02)
28	87,09%	3 (0,43)	29 (0,28)	35 (0,28)	58	70,26%		35 (0,99)	49 (0,01)

29	100,00%			25	59	88,90%	3 (0,25)	29 (0,56)	35 (0,19)
30	69,15%		3 (0,20)	35 (0,80)					

Mesmo com uma média de eficiência relativamente alta, de 85,8%, há grandes diferenças de eficiência entre os fundos analisados. Com efeito, o fundo menos eficiente (Impacto Horizonte) apresentou índice de apenas 36,2% daqueles situados na fronteira. Isso significa que a rentabilidade desse fundo precisa aumentar em 176,0% para alcançar a fronteira.

Pelos resultados, os fundos ineficientes componentes da amostra precisariam de um incremento médio de 25,5% no rendimento para atingir a fronteira eficiente.

Já a fronteira teórica contou, em sua primeira rodada, com as nove DMUs eficientes e oito fundos nocionais construídos de acordo com o procedimento iterativo para gerar a fronteira expandida. Essa nova fronteira apresentou ganho de produtividade de 0,5% em relação à DMU Caixa PMSP e de 2,4% em relação à DMU FI Vinci.

Na segunda rodada foram excluídos os fundos ineficientes e incluídos mais treze fundos nocionais, expandindo novamente a fronteira. A DMU Artesanal FI RF (3) apresentou 98,6% de eficiência em relação à nova fronteira, o fundo CEF Sebrae (29) atingiu índice de 99,8%, e o fundo Integral (35) ficou com eficiência de 98,3%. Houve, ainda, um ganho de produtividade de 0,13% sobre um fundo nocional (formado pelos fundos Fidelidade II e Artesanal). As DMUs Fidelidade II, Safra Renda Fixa, Safra Top Master e Skopos Image permaneceram na fronteira.

A terceira rodada contou com mais dezoito fundos nocionais, apresentando um ganho máximo de eficiência de 2,7% (em relação a um fundo nocional formado pelas DMUs Fidelidade II, Safra Renda Fixa e Artesanal). A quarta rodada do processo iterativo foi composta por outros 33 fundos nocionais, não resultando em ganhos significativos de produtividade (≥ 1%) em relação à fronteira anterior e contando, ainda, com os fundos Fidelidade II, Safra Renda Fixa, Safra Top Master e Skopos Image na fronteira eficiente.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho aplicou a métrica de análise envoltória de dados para mensurar a eficiência de fundos de renda fixa durante período de grave crise financeira. A DEA permite análise multicriterial de fatores, possibilitando uma abordagem além da relação risco-retorno, ao computar a taxa de administração cobrada pelos fundos. Ainda, foi empregado o *Conditional VaR*, medida de risco com maior nível de informação que o *Value at Risk*, para mensurar o risco de mercado.

Sob essa métrica, o fundo de investimento sob análise, FI Fidelidade II, mostrou-se eficiente em comparação aos pares, com nível de risco e taxa de administração abaixo da média da amostra e retorno acima do valor de referência do mercado.

Além disso, fronteira eficiente contou com nove DMUs da amostra inicial, as quais embasaram a constituição de fundos nocionais para expansão da fronteira. Esse processo iterativo expandiu a fronteira eficiente por quatro rodadas, quando o ganho de eficiência ficou abaixo do critério de incremento estipulado (≥ 1%).

Pelo lado da medida de risco, o emprego do CVaR permite uma estimativa mais acurada que o VaR, fornecendo uma expectativa média de perda. Ainda, durante o desenvolvimento deste trabalho, observou-se convergência na literatura quanto à acurácia do CVaR com emprego de EVT para estimativa de risco com distribuições com caudas pesadas. Tal ferramenta, no entanto, exige estimativas de parâmetros de forma e escala para cada série de dados, tornando o trabalho mais complexo do ponto de vista operacional.

Quanto à obtenção de dados, especial atenção foi dada à classificação e composição dos fundos, a fim de evitar comparações entre unidades com mandatos ou exposições discrepantes. Observou-se, ainda, dificuldade na obtenção de lâminas de informações de fundos exclusivos, restringindo o tamanho da amostra, devido à ausência de dados sobre o nível de risco assumido por esses fundos.

Por fim, o estudo demonstra que a análise envoltória de dados permite a adoção de uma ferramenta adequada à avaliação multicriterial, mostrando-se uma alternativa às

técnicas tradicionais de relação risco-retorno. A DEA fornece aos gestores, por um lado, emprego de mais variáveis no processo de avaliação de resultados e, por outro, informações sobre os pontos a serem abordados na busca pela eficiência. Desse modo, a DEA posiciona-se como uma opção moderna e dinâmica no processo de avaliação de desempenho de carteiras.

Fontes

[i] ANBIMA, disponível em https://www.anbima.com.br/pt_br/informar/estatisticas/fundos-de-investimento/fi- consolidado-historico.htm
[ii] A taxa de administração foi estimada pela média aritmética entre a maior e menor taxa cobrada por cada fundo, de acordo com as lâminas de informações disponibilizadas pelos fundos de investimentos.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACERBI, Carlo; TASCHE, Dirk. Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. **Economic notes**, v. 31, n. 2, p. 379-388, 2002.

ANBIMA. **Cartilha da Nova Classificação de Fundos**. 28 p. 2016. Disponível em: <https://www.anbima.com.br/data/files/B4/B2/98/EF/642085106351AF7569A80AC2/Cartilha_da_Nova_Classificacao_de_Fundos_1_.pdf> Acesso em: 13 out. 2020.

BANKER, Rajiv D.; CHARNES, Abraham; COOPER, William Wager. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. **Management science**, v. 30, n. 9, p. 1078-1092, 1984.

BELLONI, José Ângelo *et al.* **Uma metodologia de avaliação da eficiência produtiva de universidades federais brasileiras**. 2000.

BISSO, Claudio Samanez*et al.* **Produtividade e eficiência no mercado de fundos de investimento no Brasil:** Uma abordagem comparativa. Revista Brasileira de Finanças, v. 14, n. 3, p. 323-352, 2016.

CERETTA, Paulo Sergio; COSTA JR., Newton C. A. da. **Avaliação e seleção de fundos de investimento: um enfoque sobre múltiplos atributos**. Rev. adm. contemp., Curitiba, v. 5, n. 1, p. 7-22, Apr. 2001. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1415-65552001000100002&script=sci_arttext>. Acesso em 12 out. 2020.

CHARNES, A., COOPER, W. W., RHODES, E. **Measuring Efficiency of Decision Making Units**, European Journal of Operation Research, 2, pp. 429-444, 1978.

COELLI, T.; PRAZADA RAO D. S.; BATTESE G. E. ***An introduction to efficience and Productivity analysis*.** Massachussets Kluer Academic Pulishers, 1998.

COOPER, William W.; SEIFORD, Lawrence M.; ZHU, Joe (Ed.). Handbookon data envelopmentanalysis. 2011.

DESTEFANIS, Sergio. The Verdoorn law: some evidence from non-parametric frontier analysis. In: **Productivity Growth and Economic Performance**. Palgrave Macmillan, London, 2002. p. 136-164.

FÄRE, R., GROSSKOPF, S. and LOVELL, C.A.K. (1994) Production Frontiers. Cambridge University Press, Cambridge.

HARMANTZIS, F. C.; MIAO, L.; CHIEN, Y. Empirical study of value-at-risk and expected shortfall models with heavy tails. **The Journal of Risk Finance**, Emerald Group Publishing Limited, v. 7, n. 2, p. 117–135, 2006.

JORION, Philippe. **Valueat Risk:** a nova fonte de referência para a gestão do risco financeiro. Tradução: Thierry Barbe. 2ª Ed., São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2003.

JUBRAN, Aparecido Jorge. Modelo de análise de eficiência na administração pública: **estudo aplicado às prefeituras brasileiras usando a análise envoltória de dados.** 2006. Tese (Doutorado em Sistemas Eletrônicos) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006. doi:10.11606/T.3.2006.tde-13122006-180402. Acesso em 16 jun. 2021.

KASSAI, Silvia. **Utilização da análise por envoltória de dados (DEA) na análise de demonstrações contábeis**. São Paulo, v. 350, 2002.

KOUROUMA, L. et al. Extreme value at risk and expected shortfall during financial crisis. **SSRN Electronic Journal**, 06 2010.

KIMURA, Herbert *et al*. **Value At Risk – Como entender e calcular o risco pelo VaR: uma contribuição para a gestão no Brasil**. Ribeirão Preto: Inside Books, 2008

LAMB, John D.; TEE, Kai-Hong. Data envelopment analysis models of investment funds. **European Journal of Operational Research**, v. 216, n. 3, p. 687-696, 2012

LINS, Marcos Estellita*et al*. **O uso da Análise Envoltória de Dados (DEA) para avaliação de hospitais universitários brasileiros.** Ciência & saúde coletiva, v. 12, p. 985-998, 2007.

LIU, Wenbin et al. Estimationof portfolio efficiency via DEA. **Omega**, v. 52, p. 107-118, 2015.

MACEDO, Marcelo Alvaro da Silva; SILVA, Fabrícia de Farias da; SANTOS, Rodrigo

Melo. Análise do mercado de seguros no Brasil: uma visão do desempenho organizacional das seguradoras no ano de 2003. **Revista Contabilidade & Finanças**, v. 17, n. SPE2, p. 88-100, 2006.

MACEDO, M. A. S.; MACEDO, H. D. R. **Avaliação de desempenho de fundos DI no Brasil:** uma proposta metodológica. Revista Economia e Gestão, v. 7, n. 15, 2007;

MARIANO, Enzo B.; ALMEIDA, Mariana R.; REBELATTO, Daisy AN. **Princípios Básicos para uma proposta de ensino sobre análise por envoltória de dados**. Anais do XXXIV COBENGE. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2006.

PINTO, M. B.; RODRIGUES, L. F. **Uma Aplicação de Modelos DEA CCR Orientados a Input na Gestão de um Sistema de Bibliotecas Universitárias**. Disponível em: Acesso em: 06 abr. 2021.

PESSANHA, J. F. M., MELLO, M. A. R. F. D., BARROS, M., SOUZA, R. C. **Avaliação dos custos operacionais eficientes das empresas de transmissão do setor elétrico brasileiro:**uma proposta de adaptação do modelo DEA adotado pela ANEEL. Pesquisa Operacional, v. 30, n. 3, p. 521-545, 2010.

RAY, Subhash C. Data Envelopment Analysis: A Nonparametric Method of Production Analysis. **Handbook of Production Economics**, p. 1-62, 2020.

ROTELA JUNIOR, Paulo; PAMPLONA, Edson de Oliveira; SALOMON, Fernando Luiz Riêra. **Otimização de Portfólios: Análise De Eficiência**. Rev. adm. empres., São Paulo, v. 54, n. 4, p. 405-413, Aug. 2014. Disponível em:

<https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0034-75902014000400405&script=sci_arttext>. Acesso em: 12 out. 2020.

SANTOS, Ana Carolina Caetano dos *et al.* **Uso da medida de risco CVaR para estimação de retornos de fundos multimercados brasileiros**. 2019.

SOARES DE MELLO, J., MEZA, L., GOMES, E. & BIONI NETO, L. (2005), 'Curso de análise de envoltória de dados', In Anais XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO), Gramado: RS.

THANASSOULIS, E. Introduction to the theory and application of data envelopment analysis: a foundation text with integrated software, Kluwer Academic Publishers, 2001

WU, Jie *et al.* Resource allocation based on context-dependent data envelopment analysis and a multi-objective linear programming approach. **Computers & Industrial Engineering**, v. 101, p. 81-90, 2016.

[i] ANBIMA, disponível em https://www.anbima.com.br/pt_br/informar/estatisticas/fundos-de-investimento/fi- consolidado-historico.htm

[ii] A taxa de administração foi estimada pela média aritmética entre a maior e menor taxa cobrada por cada fundo, de acordo com as lâminas de informações disponibilizadas pelos fundos de investimentos.

conselho editorial

COORDENAÇÃO

José Luiz Rossi Junior

Thiago Costa Monteiro Caldeira

SUPERVISÃO E REVISÃO

Renan Silveira Holtermann

Mathias Schneid Tessmann

Milton de Souza Mendonça Sobrinho

Alessandro de Oliveira Gouveia Freire

COMUNICAÇÃO &A MARKETING

Antonio Aleixo Zaninetti Silva

Daniel Jordão

PROJETO GRÁFICO E DIAGRAMAÇÃO

Juliana Vasconcelos

idp

SGAS Quadra 607 - Módulo 49
Via L2 Sul, Brasília-DF
CEP: 70200-670

/sejaidp
(61) 3535-6565
idp.edu.br